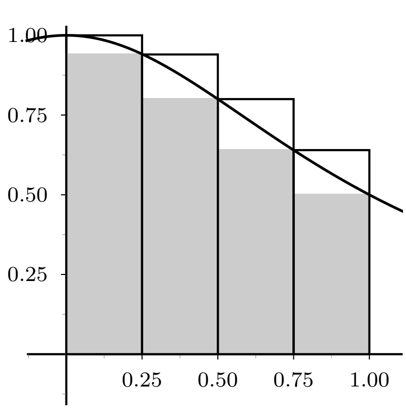
On considère l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$, où la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.
Le but de l'exercice [a] consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des «rectangles» et de partager l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.



a. D'après l'expérimentation de l'épreuve pratique de mathématiques en TS

1. a) Dans cette question on donne à n la valeur 4. Quel encadrement de l'intégrale I le dessin ci-dessus suggère-t-il ? Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?
Calculer cet encadrement à l'aide de votre calculatrice.

b) Voici comment modéliser cette situation à l'aide de Xcas [1] :

- Dans en environnement graphique 2D (Alt+g), on définit la fonction f : `f(x) :=1/(1+x^2)`
- On trace le graphe de f sur $[0;1]$: `graphe(f(x),x=0..1)`
- On trace les quatre rectangles supérieurs :
`seq(rectangle(point(k/4,0),point(k/4+1/4,0),point(k/4+1/4,f(k/4)),couleur=rouge),k=0..3)`
- On calcule l'aire des ces rectangles : `valsup :=evalf(somme(1/4*f(k/4),k=0..3))`

Dessiner maintenant les quatre rectangles inférieurs en vert et calculer leur aire. Retrouver ainsi de l'amplitude de encadrement donné à la question **1.**.

2. On souhaite généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.

a) Placer le curseur sur la ligne de la commande permettant de tracer les rectangles supérieurs et utliser Alt+n pour insérer une nouvelle entrée.
Définir le paramètre n (entier compris entre 0 et 100 prenant 4 pour valeur initiale) : `supposons(n=[4,0,100,1])`
Modifier les commandes permettant de tracer les rectangles pour avoir n rectangles. Faire de même pour les calculs d'aire.

b) Conjecturer une valeur n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieur ou égale à 10^{-2}.

3. Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en **2. b)**, l'amplitude de l'encadrement est bien inférieur ou égale à 10^{-2}.

Remarque : Xcas peut donner la valeur exacte de cette intégrale : `integrer(f(x),x,0,1)`

1. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`