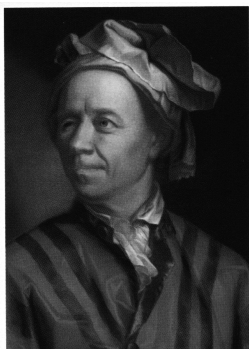


LA FONCTION INDICATRICE D'EULER



Leonhard Euler (1707 - 1783), le prince des mathématiciens.

INFORMATION

Leonhard Euler (Bâle, 1707 - Saint-Petersbourg, 1783) est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, surnommé par ses pairs le prince des mathématiciens. Ses contributions aux mathématiques sont considérables : il fonde la théorie des fractions continues, s'occupe de probabilités et, surtout, fait considérablement progresser l'analyse. Il s'intéresse aussi à l'arithmétique et aux nombres premiers, démontre et généralise le petit théorème de Fermat après avoir introduit ce que nous allons étudier aujourd'hui : *la fonction indicatrice d'Euler*^a.

^aD'après l'ouvrage «Merveilleux nombres premiers» de Jean-Paul DELAHAYE.

Bien que les définitions suivantes soit au programme de mathématiques de troisième, il est important qu'elles soient rappelées proprement.

DÉFINITION 1

Étant donné deux entiers n et m , on dit que n divise m lorsqu'il existe un entier q tel que $m = qn$.

THÉORÈME 1

Étant donné deux entiers n et m , il existe un plus grand diviseur commun à n et à m , cet entier se note :

$$\text{PGCD}(n, m).$$

THÉORÈME 2

L'algorithme d'Euclide décrit ci-dessous permet de calculer $\text{PGCD}(n, m)$:

Variables : n, m, r (nombres entiers)

Entrées : n et m

Traitement :

Tant que $m \neq 0$

$r \leftarrow \text{reste}(n, m);$

$n \leftarrow m;$

$m \leftarrow r;$

FinTantque

Afficher n

Algorithme 1 : PGCD : l'algorithme d'Euclide

EXERCICE 1

Utiliser cet algorithme pour calculer à la main $\text{PGCD}(190, 75)$.

EXERCICE 2

Programmer cet algorithme sur Algobox¹.

Calculer $\text{PGCD}(15\,264, 25\,974)$ et $\text{PGCD}(2\,555, 356)$.

Que peut-on dire des nombres 2 555 et 356 ? Expliquer.

DÉFINITION 2

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1, c'est-à-dire lorsque leur seul diviseur commun est 1.

DÉFINITION 3

Fonction indicatrice d'Euler

On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction qui à chaque entier naturel n associe $\varphi(n)$ qui est égal au nombre d'entiers entre 0 et $n - 1$ qui sont premiers avec n .

On convient que : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.

¹Reste de la division de n par m : $n \% m$

EXERCICE 3

Vérifier que $\varphi(11) = 10$ et $\varphi(12) = 4$.

Si n est un nombre premier, que vaut $\varphi(n)$? Expliquer.

EXERCICE 4

Programmer le calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'Algobox pour compléter les tableaux ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$																				

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\varphi(n)$																				

EXERCICE 5

Voici une conjecture émise par le mathématicien américain R. Carmichael en 1942 : «pour tout entier $n > 0$, il existe au moins un nombre entier $m > 0$ avec $m \neq n$ tel que

$$\varphi(n) = \varphi(m).$$

On n'a toujours pas démontré ce résultat. En revanche, on sait que, s'il existe un contre-exemple n , alors son écriture nécessite au moins 100 000 000 chiffres.

Vérifier cette conjecture pour tous les entiers inférieurs à 10.

EXERCICE 6

Voici un programme Xcas (la fonction «euler()» est la fonction φ décrite ci-dessus).

Que fait-ce programme?

Observer le résultat de «exo6(200)».

```
exo6(n):={
  local k, liste:=[point(0,0)];
  for (k:=0;k<=n;k:=k+1)
    {liste:=liste, point(k,euler(k));}
}
```

EXERCICE 7

Voici une formule qui sera peut-être justifiée plus tard dans votre scolarité :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

En sachant que le symbole « \sum » signifie «somme» et le symbole « $|$ » signifie «divise», comprendre et vérifier cette formule pour quelques entiers inférieurs à 40.