Leonhard Euler (1707 – 1783), le prince des mathématiciens.

La fonction indicatrice d'Euler

Information

Leonhard Euler (Bâle, 1707 - Saint-Pétersbourg, 1783) est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, surnommé par ses pairs le prince des mathématiciens. Ses contibutions aux mathématiques sont considérables : il fonde la théorie des fractions continues, s'occupe de probabilités et, surtout, fait considérablement progresser l'analyse. Il s'intéresse aussi à l'arithmétique et aux nombres premiers, démontre et généralise le petit théorème de Fermat après avoir introduit ce que nous allons étudier aujourd'hui : *la fonction indicatrice d'Euler*[a].

[a] D'après l'ouvrage «Merveilleux nombres premiers» de Jean-Paul Delahaye.

Bien que les définitions suivantes soit au programme de mathématiques de troisième, il est important qu'elles soient rappelées proprement.

Définition 1

Étant donné deux entiers n et m, on dit que n divise m lorsqu'il existe un entier q tel que $m = qn$.

Théorème 1

Étant donné deux entiers n et m, il existe un plus grand diviseur commun à n et à m, cet entier se note :

$$\text{PGCD}(n, m).$$

Théorème 2

L'algorithme d'Euclide décrit ci-dessous permet de calculer PGCD(n, m) :

Variables : n, m, r (nombres entiers)
Entrées : n et m
Traitement :
Tant que $m \neq 0$
  $r \leftarrow$reste(n,m);
  $n \leftarrow m$;
  $m \leftarrow r$;
FinTantque
Afficher n

Algorithme 1 : PGCD : l'algorithme d'Euclide

Exercice 1

Utiliser cet algorithme pour calculer à la main PGCD$(190, 75)$.

Exercice 2

Programmer cet algorithme sur Algobox[1].
Calculer PGCD$(15\,264, 25\,974)$ et PGCD$(2\,555, 356)$.
Que peut-on dire des nombres 2 555 et 356 ? Expliquer.

Définition 2

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1, c'est-à-dire lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Définition 3 *Fonction indicatrice d'Euler*

On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction qui à chaque entier naturel n associe $\varphi(n)$ qui est égal au nombre d'entiers entre 0 et $n - 1$ qui sont premiers avec n.
On convient que : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.

[1] Reste de la division de n par m : $n\,\%m$

Exercice 3

Vérifier que $\varphi(11) = 10$ et $\varphi(12) = 4$.
Si n est un nombre premier, que vaut $\varphi(n)$? Expliquer.

Exercice 4

Programmer le calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'Algobox pour compléter les tableaux ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$																				

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\varphi(n)$																				

Exercice 5

Voici une conjecture émise par le mathématicien américain R. Carmichaël en 1942 : «pour tout entier $n > 0$, il existe au moins un nombre entier $m > 0$ avec $m \neq n$ tel que

$$\varphi(n) = \varphi(m).$$

On n'a toujours pas démontré ce résultat. En revanche, on sait que, s'il existe un contre-exemple n, alors son écriture nécéssite au moins 100 000 000 chiffres.
Vérifier cette conjecture pour tous les entiers inférieurs à 10.

Exercice 6

Voici un programme Xcas (la fonction «euler()» est la fonction φ décrite ci-dessus).
Que fait-ce programme ?
Observer le résultat de «exo6(200)».

```
exo6(n):={
 local k,liste:=[point(0,0)];
 for (k:=0;k<=n;k:=k+1)
 {liste:=liste ,point(k,euler(k));}
}
```

Exercice 7

Voici une formule qui sera peut-être jutifiée plus tard dans votre scolarité :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

En sachant que le symbole «$\sum$» signifie «somme» et le symbole «|» signifie «divise», comprendre et vérifier cette formule pour quelques entiers inférieurs à 40.