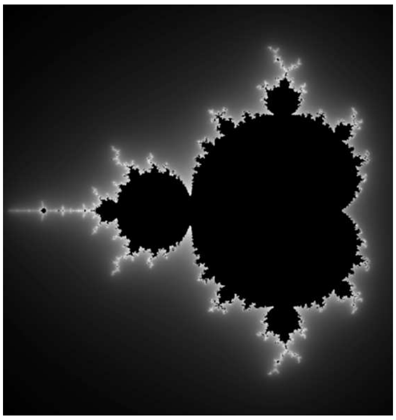


Fractal de Mandelbrot

Le hasard fait bien les choses

Introduction

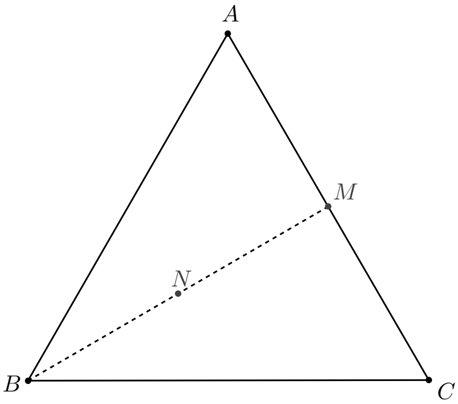
ABC étant un triangle donné, partant du point A, on construit :

- le milieu M de $[AC]$ puis
- le milieu N de $[BM]$ puis
- le milieu P de $[NC]$ puis
- le milieu Q de $[AP]$ puis
- le milieu R de $[CQ]$ ...

et on continue en plaçant à chaque étape le milieu du segment joignant le point précédent et un des trois points A, B et C choisi au hasard.

Exercice 1

Voici ci-dessous un triangle équilatéral ABC où les points M et N décrits ci-dessus ont été construits. Construire les autres points.



Que se passe-t-il quand le nombre de points devient très grand ? Va-t-il y avoir des points partout ?

Exercice 2

Pour avoir une idée de la réponse, faisons travailler AlgoBox en programmant l'algorithme ci-contre qui :

- calcule les coordonnées du milieu des points de coordonnées $(u;v)$ (dernier point placé) et $(i;j)$ (un des points $A(1;1)$, $B(0,0)$ et $C(2;0)$ choisi au hasard[a]) ;
- place ce point ;
- recommence 1 000 fois le travail.

On veillera à choisir un repère avec :
Xmin : 0, Xmax : 2, Ymin : 0, Ymax : 1.

[a] Pour avoir un nombre entier entre 1 et 3 écrire : `floor(random()*3)+1`

```
Variables : u, v, i, j, k, p (nombres)
Traitement :
u←1
v←1
Pour k de 1 jusqu'à 1000
    Afficher le point de coordonnées (u;v)
    p←un entier au hasard 1, 2 ou 3
    Si p = 1 alors
        i←0
        j←0
    Sinon
        Si p = 2 alors
            i←1
            j←1
        Sinon
            i←2
            j←0
        FinSi
    FinSi
    u←(u + i)/2
    v←(v + j)/2
FinPour
```

Exercice 3

Après avoir observé le résultat du programme, des questions se posent :

- Comment expliquer qu'il n'y ait aucun point dans le triangle central ?
- Si on élimine ce triangle, l'aire de la surface où il peut y avoir des points est celle du triangle ABC, notée $\mathscr{A}$, multipliée par $\dfrac{3}{4}$.
- Ce triangle est entouré de trois triangles dont les côtés sont deux fois plus petits. Comment expliquer ques ces triangles soient vides également ?
- Si on les élimine, l'aire de la surface où il peut y avoir des points est $\mathscr{A} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4}$.
- En poursuivant ainsi, on peut arriver à une surface où il peut y avoir des points, d'aire $\mathscr{A}$ multipliée par $\dfrac{3}{4}$ autant de fois que l'on veut. Calculer $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{800}$. Commenter.
- On peut dire que pour cette figure, **les parties ont la même forme que le tout**, mais qu'elles sont à une échelle différente : on pourrait zoommer indéfiniment en voyant toujours la même figure.
- Au lieu de prendre le milieu de chaque segment, on peut par exemple choisir de prendre le point placé au tiers du segment à partir du dernier point tracé : pour celà il faudra modifier les deux dernières affectations (pour l'avant dernière celà donne : $(u + 2 * i)/3$).
- On peut aussi modifier le programme pour faire varier le nombre de points de base, on prendre 2 points ou 4 points (il faudra dans ce dernier cas ajouter une autre instruction conditionnelle).