TP 1 : Méthode d'Euler pour une équation différentielle [1]

Énoncé

On considère l'équation différentielle définie par :

$$(E)\ :\ y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t} \text{ et } y(0) = 10.$$

où $y(t)$ correspond à la température (en degré Celsius) d'une réaction chimique au bout de t heures.
$y(0) = 10$ signifie qu'à l'instant $t = 0$, la température est de 10°C.
On admet que ce problème possède une solution f définie sur $[0; +\infty[$.

Dans une première partie, il s'agit d'appliquer la méthode d'Euler à l'aide d'un tableur, pour obtenir une approximation sur $[0; 5]$ d'une fonction f solution de l'équation différentielle (E).

Dans une deuxième partie, il s'agira de comparer une fonction donnée avec l'approximation trouvée, puis de vérifier que cette fonction est l'unique solution de (E).

Partie informatique

On se place sur l'intervalle $[0; 5]$ en prenant un pas $h = \dfrac{5}{n}$ où n est un entier supérieur à 2. On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k, d'abscisse t_k et d'ordonnée y_k telles que : $t_0 = 0$, $y_0 = 10$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$: $t_{k+1} = t_k + \dfrac{5}{n}$.

1. Déterminer l'expression de y_{k+1} en fonction de y_k, de t_k et de n donnée par la méthode d'Euler.

Appeler le professeur.

2. À l'aide du tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	k	t_k	y_k
50	0	0	10,000
Pas égal à	1	0,1	11,500
0,1	2	0,2	12,827
	3	0,3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Appeler le professeur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec $n = 50$.
Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque $n = 100$ ou $n = 200$.

3. Afficher la «courbe»correspondant au nuage des 100 points $M_n(y_n; y_n)$ en ajustant les différentes options de la fenêtre graphique afin que le graphique obtenu soit suffisamment exploitable.

Appeler le professeur.

1. D'après Maths repères - Préparation à l'épreuve pratique de Mathématiques au BAC S (HACHETTE Éducation)

4. Quelles premières observations peut-on faire sur l'évolution de cette température au cours des cinq premières heures qui suivrons la réaction ?

5. Construire la liste des valeurs, à côté des précédentes (colonne D), correspondant aux images des valeurs t_n par la fonction f définie par :

$$f(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Afficher ensuite la courbe de f. Quelle conjecture est-il légitime de faire à propos de la solution de l'équation (E) ?

Appeler le professeur et lui présenter vos résultats. Après validation imprimer votre document.

Partie mathématique

1. Montrer que la fonction f est effectivement une solution du problème posé.

2. On souhaite montrer que f est l'unique solution du problème posé. Soit g une autre solution de (E). Montrer que la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$, et vérifie $h(0) = 0$.

3. Résoudre l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.

4. Conclure.

5. Montrer que la température maximale est atteinte au bout d'1 h 30. Quelle est sa valeur ?

Complément

Reprendre ce TP avec les équations différentielles et les fonctions f ci-dessous :

- $y' + \dfrac{1}{3}y = 30e^{-\frac{1}{3}t}$, avec $y(0) = 15$ et $f(t) = (30t + 15)e^{-\frac{1}{3}t}$.
- $5y' + 2y = 100e^{-\frac{2}{3}t}$, avec $y(0) = 5$ et $f(t) = (20t + 5)e^{-\frac{2}{3}t}$.