TP 1

L'objet de ce TP est de s'initier à l'utilisation d'un logiciel de calcul formel permettant une aide à la résolution d'un problème sur les équations différentielles. On utilisera la logiciel XCAS, que vous pourrez télécharger librement à l'adresse suivante : http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ parisse/giac_fr.html

Vous rédigerez vos réponses sur une feuille que je ramasserai à la fin de l'heure.

Problème 1

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ telle que $f(t)$ est la température (en degré Celsius) d'une réaction chimique au bout de t heures. On suppose qu'à l'instant $t=0$, la température est de 10°C. On admet que f est une solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. On cherche une solution à notre problème sous la forme $f_p(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-t/2}$ où a et b sont des constantes à déterminer.

- **a)** Définir la fonction f_p dans XCAS en tapant : f(t) :=(a*t+b)*exp(-t/2)
- **b)** Dans la ligne suivante, taper : function_diff(f)(t)+1/2*f(t)
  Simplifier ensuite l'expression retournée par XCAS en tapant : simplify(...) en remplaçant ... par l'expression renvoyée à la ligne précédente (faire un copier CTRL+c coller CTRL+v).
- **c)** En observant le résultat, en déduire une solution particulière de (E) vérifiant $f_p(0) = 10$.

2. On désire montrer que f_p est l'unique solution du problème.

- **a)** Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - f_p$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$.
- **b)** Résoudre l'équation différentielle (E').
- **c)** En déduire que l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 10$ est la fonction f_p.

3. Vérifier votre résultat à l'aide de XCAS en tapant : desolve([y'+1/2*y=20*exp(-x/2),y(0)=10],y)

4. On veut montrer que la température maximale est atteinte au bout d'1 h 30 min et déterminer une valeur approchée au dixième de celle-ci.

- **a)** Redéfinir la fonction f avec la solution trouvée.
  Puis à l'aide de XCAS vérifier que $f'(t) = -5(2t-3)\mathrm{e}^{-t/2}$ (utiliser les fonctions function_diff(f)(t) et factor(...)).
- **b)** En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$, puis la réponse à au problème (pour calculer une valeur approchée utiliser evalf(f(1.5))

Problème 2

On note $f(x)$ le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $f(0) = 1$ et on admettra que f est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = \frac{1}{20} y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a) Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est une solution de $(E') : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$.

b) Résoudre (E').
Vérifier votre réponse avec XCAS à l'aide de la fonction `desolve(...)`.

2. En déduire l'expression de $f(x)$.
Vérifier votre réponse avec XCAS en tapant par exemple `solve(1/g(0)=1,c_0)` où g est une solution de (E') donnée par XCAS.

3. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$ (utiliser XCAS pour le calcul de la dérivée et sa simplification).

4. Montrer que $f(x) = \frac{10}{9\mathrm{e}^{-x/2} + 1}$.

5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Vérifier votre résultat en tapant : `limite(f(x),x,+infinity)`
Interpréter le résultat.

6. Utiliser XCAS pour déterminer en quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ? Taper `evalf(resoudre(f(x)>=5))`